

Ein mathematisches Modell für die Epidemie-Dynamik bei BSE



Manfred Kühleitner und Werner Georg Nowak,
Institut für Mathematik

1. Grundannahmen. Für die Gesamtheit aller Rinder eines bestimmten Gebietes (z.B. britisches UK) werden zu jedem Zeitpunkt t die folgenden Anzahlfunktionen betrachtet:

$g(t)$ BSE-infizierte Rinder,
 $h(t)$ BSE-infektiöse Rinder,
 $f^*(t)$ im Zeitintervall $[0, t]$ geschlachtete, BSE-infizierte Rinder,
 $f(t)$ BSE-positiv diagnostizierte Schlachtrinder im Intervall $[0, t]$.

Die folgenden Annahmen sind ebenso plausibel wie einfach (c_0, c_1, \dots seien durchwegs positive Konstante):

- (1) Der Dunkelzifferfaktor sei zeitlich invariant:
 $f^*(t) = c_0 f(t)$
- (2) Die Zahl der Infektiösen zur Zeit t ist proportional der Zahl der Infizierten zur Zeit $t - \lambda$ (λ die sog. Latenzzeit):
 $h(t) = c_1 g(t - \lambda)$
- (3) Die Häufigkeit von BSE-positiv diagnostizierten Schlachtungen ist proportional zur Zahl der momentan infektiösen Rinder:
 $f'(t) = c_2 h(t)$

Für Neuansteckungen gibt es bei BSE prinzipiell zwei Wege:

- (a) von lebendem Tier zu Tier: proportional der Zahl der Infektiösen, also $c_3 h(t)$
- (b) postmortal über Tiermehl etc.: zuerst proportional der Zahl von BSE-Schlachtrindern, also $c_4 f'(t)$. Zu einem Zeitpunkt t_1 wird Tiermehl verboten, damit wird dieser Anteil (theoretisch) gleich 0.

2. Die Differentialgleichung der BSE-Epidemiedynamik. Aus den angeschriebenen fünf Gleichungen folgt nach einfacher Rechnung, unter Benützung der sog. linearen Approximation $g(t - \lambda) \approx g(t) - g'(t) \lambda$,

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \begin{cases} a_1 & \text{für } t < t_0, \\ a_2 & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Dabei sind $a_1 > 0 > a_2$ Konstante, und $t_0 = t_1 + \lambda$.

3. Die explizite Modellfunktion. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man

$$f(t) = \begin{cases} C_1 + C_2 e^{a_1 t} & \text{für } t < t_0, \\ C_3 + C_4 e^{a_2 t} & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Die insgesamt sechs Konstanten $a_1, a_2, C_1, \dots, C_4$ sind dabei nicht völlig unabhängig: Die praktisch plausible Bedingung, dass die Kurve an der Stelle $t = t_0$ weder Sprung noch Knick aufweisen soll, reduziert die Zahl der freien Parameter auf vier. Diese werden nach der Methode der kleinsten Quadrate an vorliegende Daten angepasst.

Nach Mitteilung des *Department for Environment, Food and Rural Affairs of the UK* wurden in den Jahren 1987 – 2001 die folgenden Zahlen von BSE-Schlachtrindern festgestellt:

{446, 1641, 6958, 13038, 22931, 35276, 37011, 26096, 15710, 8879, 4933, 3502, 2703, 1633, 1103}.

Für positive ganze Zahlen $t \leq 15$ sei $F(t)$ die Summe der ersten t Werte dieser Tabelle. Dann geht es um die Minimierung der Summe

$$\sum_{t=1}^{15} (F(t) - f(t))^2.$$

Als konkrete Modellfunktion der BSE-Dynamik für das britische UK ergibt sich mit Hilfe des Solvers von *Microsoft Excel* (Parameterwerte gerundet)

$$f(t) = \begin{cases} -6752 + 3293 e^{0.546t} & \text{für } t \leq 6.02, \\ 183111 - 1738500 e^{-0.471t} & \text{für } t \geq 6.02. \end{cases}$$

4. Diskussion des Resultats. Die hervorragende Übereinstimmung des Modells mit den Daten (vgl. Abb. 1) ist ein Indiz, daß unsere Überlegungen die Dynamik der BSE-Epidemie qualitativ richtig beschreiben. Insbesondere die Rolle der Tiermehl-Fütterung und ihres Verbots wird erhärtet: Das Tiermehl-Verbot trat im Juli 1988 in Kraft, d.h. $t_1 \approx 1.5$. Angesichts der bekannt langen Latenzzeit bei BSE von 4 bis 5 Jahren ist unser Wert $t_0 = t_1 + \lambda \approx 6$ durchaus plausibel.

5. Modellrechnung: „Was wäre gewesen, wenn...“. Auf der Basis des gut bestätigten Modells sind nun *hypothetische Kalkulationen* möglich, die jeweils etwas veränderte Szenarien durchrechnen. Z.B. kann man untersuchen, wie sich der BSE-Gesamtschaden entwickelt hätte, wenn das Tiermehlverbot und alle andern flankierenden Maßnahmen ein Jahr später in Kraft getreten wären. Die neue Modellfunktion lautet

$$f_{\text{neu}}(t) = \begin{cases} -6752 + 3293 e^{0.546t} & \text{für } t \leq 7.02, \\ 320508 - 4795253 e^{-0.471t} & \text{für } t \geq 7.02. \end{cases}$$

Eine vergleichende Graphik (Abb. 2) zeigt den beträchtlichen Zuwachs BSE-positiver Schlachtrinder.

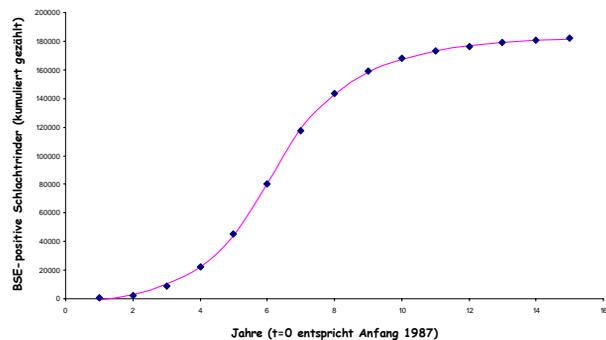


Abb. 1: BSE-Fälle im britischen UK 1987-2001, kumuliert gezählt
Modellkurve und Datenpunkte

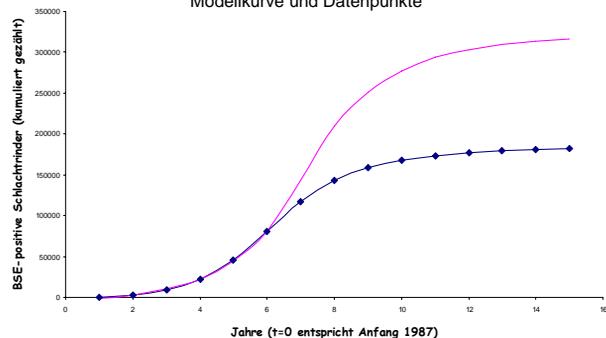


Abb. 2: BSE-Fälle im UK, real (unten) und hypothetisch (oben), bei ein Jahr späterem Tiermehlverbot